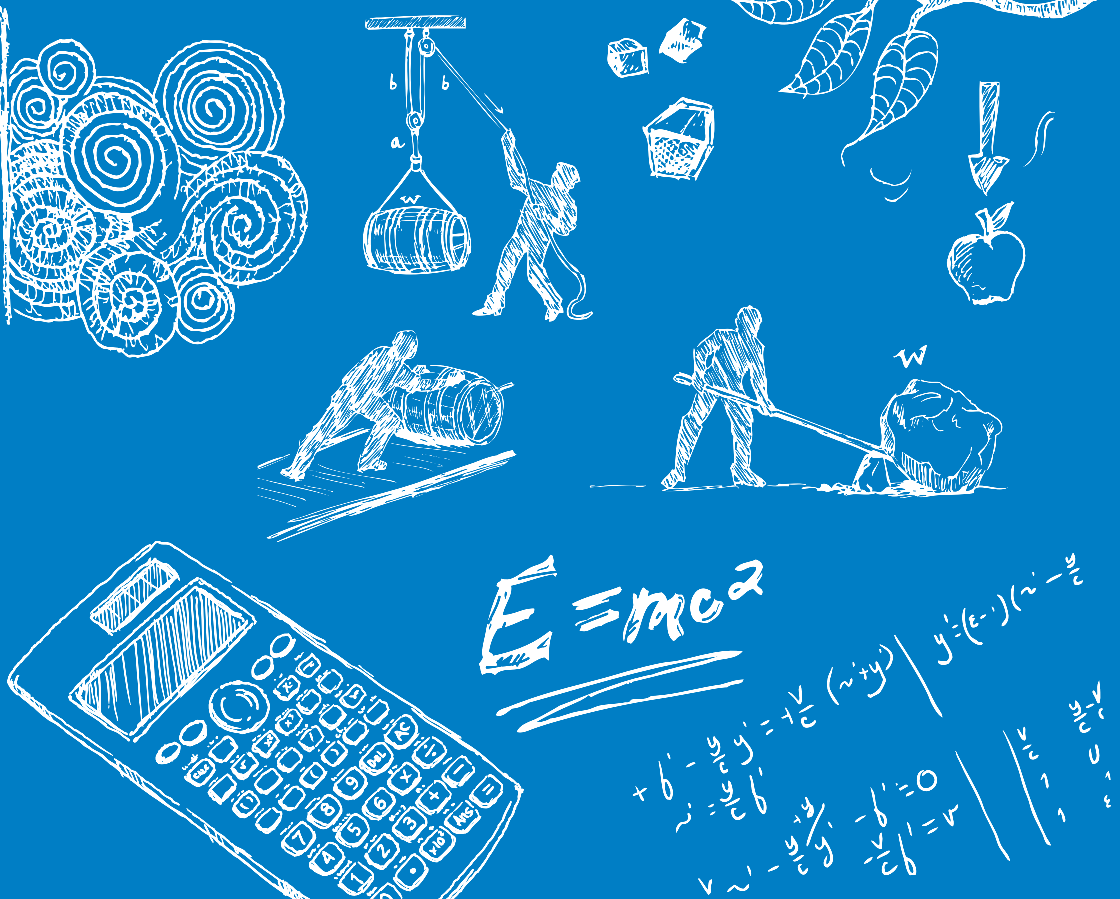
Formelsammlung

So läuft die nächste Klausur!

Mathematik | Physik | Chemie

klasseWasser.de




klasseWasser.de
Bio-Test? Chemie-Klausur?
Wir helfen dir, den Durchblick zu behalten. Erfahre alles über Wasser - das wohl erstaunlichste Element. Klick dich rein und die nächste Prüfung läuft ganz von alleine. www.klassewasser.de

Inhaltsverzeichnis

1. Nützliches
1.1 Römische Zahlenzeichen 4
1.2 Griechisches Alphabet 4
1.3 Einheiten von Größen 5

2. Zahlenbereiche
2.1 Teilbarkeiten in $\mathbb{N}^*$ 6
2.2 Termumformungen 7
2.3 Bruchrechnen 7
2.4 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen 7
2.5 Mittelwerte 9

3. Prozentrechnung
3.1 Grundbegriffe 10

4. Zinsrechnung
4.1 Grundbegriffe 10

5. Geometrie
5.1 Das Dreieck 11
5.2 Das Viereck 13
5.3 Strahlensätze 14
5.4 Vektoren in der Ebene 15
5.5 Stereometrie 17

6. Trigonometrie
6.1 Kreisfunktionen 19
6.2 Ebene Trigonometrie 20

7. Lösen von Gleichungen
7.1 Äquivalenzumformungen 20
7.2 Lineare Gleichungen 21
7.3 Quadratische Gleichungen 21
7.4 Polynome n-ten Grades 22
7.5 Gleichungen n-ten Grades 22

8. Stochastik
8.1 Ereignisse 23
8.2 Kombinatorik 23
8.3 Wahrscheinlichkeit 24
8.4 Verteilungen 26

9. Physik
9.1 Größen und Einheiten 30

10. Chemie
10.1 Formeln und Periodensystem 32

1. Nützliches

1.1 Römische Zahlenzeichen

Römische Zahlen sind Zahlenzeichen (Symbole), die ihren Ursprung in der römischen Antike haben. Die Darstellung der Zahlen beruht auf der Addition und Subtraktion der Werte von sieben Symbolen.

Zahl	Zeichen	Zahl	Zeichen	Zahl	Zeichen
1	I	11	XI	30	XXX
2	II	12	XII	40	XL
3	III	13	XIII	50	L
4	IV	14	XIV	60	LX
5	V	15	XV	99	XCIX
6	VI	16	XVI	100	C
7	VII	17	XVII	300	CCC
8	VIII	18	XVIII	400	CD
9	IX	19	XIX	500	D
10	X	20	XX	1.000	M

1.2 Griechisches Alphabet (Druckbuchstaben)

Das griechische Alphabet ist die Weiterentwicklung der phönizischen Schrift. Sie wird seit dem 9. Jahrhundert v. Chr. geschrieben. Es umfasst 24 Buchstaben.

Α α	Alpha	Η η	Eta	Ν ν	Ny	Τ τ	Tau
Β β	Beta	Θ θ	Theta	Ξ ξ	Xi	Υ υ	Ypsilon
Γ γ	Gamma	Ι ι	Jota	Ο ο	Omikron	Φ φ	Phi
Δ δ	Delta	Κ κ	Kappa	Π π	Pi	Χ χ	Chi
Ε ε	Epsilon	Λ λ	Lambda	Ρ ρ	Rho	Ψ ψ	Psi
Ζ ζ	Zeta	Μ μ	My	Σ σ	Sigma	Ω ω	Omega

1.3 Einheiten von Größen

Länge					
1 km	=	1.000 m	1 m	=	0,001 km
1 m	=	10 dm	1 dm	=	0,1 m
1 dm	=	10 cm	1 cm	=	0,01 m
1 cm	=	10 mm	1 mm	=	0,1 cm
Fläche					
1 km^2	=	100 ha			
1 ha	=	100 a	1 a	=	0,01 ha
1 a	=	100 m^2	1 m^2	=	0,01 a
1 m^2	=	100 dm^2	1 dm^2	=	0,01 m^2
1 dm^2	=	100 cm^2	1 cm^2	=	0,0001 m^2
1 cm^2	=	100 mm^2	1 mm^2	=	0,01 cm^2
Rauminhalt					
1 m^3	=	1.000 dm^3	1 dm^3	=	0,001 m^3
1 dm^3	=	1.000 cm^3	1 cm^3	=	0,001 dm^3
1 cm^3	=	1.000 mm^3	1 mm^3	=	0,001 cm^3
Volumen					
1 hl	=	100 l	1 l	=	1 dm^3
1 l	=	100 cl	1 cl	=	10 cm^3
1 cl	=	10 ml	1 ml	=	1 cm^3
Masse					
1 t	=	10 dt	1 kg	=	0,001 t
1 dt	=	100 kg	1 kg	=	0,01 dt
1 kg	=	1.000 g	1 g	=	0,001 kg
1 g	=	1.000 mg	1 mg	=	0,001 g
Zeit					
1 Jahr	=	12 Monate	1 Tag	=	1.440 min
1 Monat	=	28 – 31 Tage	1 Tag	≈	0,00274 Jahre
1 Tag	=	24 h	1 Jahr	≈	8.766 h*
1 h	=	60 min	1 min	≈	0,0167 h
1 min	=	60 s			

*Bedingt durch das Schaltjahr werden sechs Stunden zu einem Jahr (8.760 Stunden) dazu gerechnet.

2. Zahlenbereiche

Zahlen		ohne Null	nicht negativ	positiv	nicht positiv	negativ
natürliche	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}^*$	–	–
ganze	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^*$	$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ *oder* $\mathbb{Z}_+$	$\mathbb{Z}_{>0}$ *oder* $\mathbb{Z}^*_+$	$\mathbb{Z}_{\leq 0}$ *oder* $\mathbb{Z}_-$	$\mathbb{Z}_{<0}$ *oder* $\mathbb{Z}^*_-$
rationale	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}^*$	$\mathbb{Q}_{\geq 0}$ *oder* $\mathbb{Q}_+$	$\mathbb{Q}_{>0}$ *oder* $\mathbb{Q}^*_+$	$\mathbb{Q}_{\leq 0}$ *oder* $\mathbb{Q}_-$	$\mathbb{Q}_{<0}$ *oder* $\mathbb{Q}^*_-$
reelle	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_{\geq 0}$ *oder* $\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_{>0}$ *oder* $\mathbb{R}^*_+$	$\mathbb{R}_{\leq 0}$ *oder* $\mathbb{R}_-$	$\mathbb{R}_{<0}$ *oder* $\mathbb{R}^*_-$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ $\quad \mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2...\}$ $\quad \mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{k}{n}, k \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N}^* \right\}$ $\quad \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

2.1 Teilbarkeit in $\mathbb{N}^*$

Teiler (t|a): *t* ist *Teiler* von *a*, wenn es eine Zahl *b* gibt, sodass $t \cdot b = a$ ergibt.

Teilbarkeitsregeln

1) Ist *t* Teiler von *a* als auch von *b*, dann ist *t* auch Teiler der Summe $a + b$.
2) Ist *t* Teiler von *a* als auch von *b*, dann ist *t* auch Teiler der Differenz $a - b$.
3) Ist *t* Teiler von *a* und *a* Teiler von *b*, dann ist *t* auch Teiler von *c* (Transitivität).
4) Ist *t* Teiler von *a*, dann ist *t* Teiler jedes Produktes $a \cdot b$.

Teiler *t*	Eine natürliche Zahl ist durch *t* teilbar, ...
2	wenn ihre letzte Ziffer eine 2, 4, 6, 8 oder 0 ist.
3	wenn ihre Quersumme, also die Summe all ihrer Ziffern durch 3 teilbar ist.
4	wenn ihre letzten 2 Stellen durch 4 teilbar sind.
5	wenn ihre letzte Stelle eine 5 oder eine 0 ist.
6	wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.
8	wenn ihre letzten 3 Stellen durch 8 teilbar sind.
9	wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
10	wenn ihre letzte Stelle eine 0 ist.

2.2 Termumformungen

	Addition	Multiplikation
Kommutativgesetz	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetz	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Distributivgesetz	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	
Binomische Formeln	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$	

2.3 Bruchrechnung

Erweitern/Kürzen	$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$	$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$
Addition/Substraktion	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$
Multiplikation/Division	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Nenner $\neq 0$

2.4 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Potenzen

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a} \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\};\ n \in \mathbb{N}$$

Potenz a^n, Basis a (**Grundzahl**) und Exponent n (**Hochzahl**).

Sonderfälle sind: $a^0 = 1,\ a^1 = a,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Für $a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ gilt mit $a \in \mathbb{R}, a > 0, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$

gleiche Basis	gleicher Exponent	Potenzieren
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $a^n : b^n = (a : b)^n$	$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$

Die Gesetze gelten für alle $m,n \in \mathbb{R}$ bei positiven reellen Basen.
Für $m,n \in \mathbb{Z}$ gelten sie bei Basen aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Wurzeln

Das Wurzelziehen ist eine Art umgekehrtes Quadrieren: Man sucht eine Zahl, sodass das Quadrat dieser Zahl unsere ursprüngliche Zahl ergibt.

$a = c^n$ ist gleich $c = \sqrt[n]{a}$ (gelesen: **n-te Wurzel aus *a***). $a \in \mathbb{R}, a \geq 0, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, c \geq 0$

Man nennt a **Radikand**, n **Wurzelexponent**, $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ **Quadratwurzel** und $\sqrt[3]{a}$ **Kubikwurzel**.

Wurzelgesetze

Für alle $m, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ und $a, b \in \mathbb{R}; a, b \geq 0$ gilt:

1) $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$ $\qquad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

2) $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a^{m-n}}$

3) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ $\qquad \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ $\qquad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} \; \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$

Notizen

Logarithmen

$b = a^c$ ist gleich $c = log_a b$ (gelesen: **Logarithmus *b* zur Basis *a***). $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, a > 0, b \in \mathbb{R}, b > 0$

Man nennt c **Logarithmus**, a **Basis**, b **Numerus**.

Insbesondere gilt: $log_a 1 = 0, log_a a = 1, a^{log_a b} = b$

Für jede zulässige Basis, für alle $u, v \in \mathbb{R}_{>0}$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt:

Logarithmengesetze	$log_a(u \cdot v) = log_a u + log_a v$ $log_a \frac{u}{v} = log_a u - log_a v$	$log_a u^r = r\ log_a u$ $log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} log_a u \quad (n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$
Basiswechsel	$log_c b = \frac{log_a b}{log_a c} = \frac{ln\ b}{ln\ c} = \frac{lg\ b}{lg\ c}$	

Achtung: $log_1 a$ ist nicht erklärt!

2.5 Mittelwerte

Der Mittelwert beschreibt den statistischen Durchschnittswert. Für den arithmetischen Mittelwert addiert man alle Werte eines Datensatzes und teilt die Summe durch die Anzahl aller vorhandenen Werte.

	bei 2 Größen a_1, a_2	bei n Größen $a_1, a_2, \dots, a_n$
Arithmetischer Mittelwert	$\overline{x} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$	$\overline{x} = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$
Geometrischer Mittelwert	$g = \sqrt[2]{a_1 \cdot a_2}$	$g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$
Quadratischer Mittelwert	$Q = \sqrt[2]{\frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)}$	$Q = \sqrt[2]{\frac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}$

3. Prozentrechnung

3.1 Grundbegriffe

Grundbegriffe	
Grundwert	G
Prozentwert	W
Prozentzahl	p
Prozentsatz: $p\,\%$	$p\% = \frac{p}{100}$
Promillesatz: p ‰	p ‰ $= \frac{p}{1000}$ Umrechnung: 1 % = 10 ‰

4. Zinsrechnung

4.1 Grundbegriffe

Grundbegriffe				
Kapital	K	Zinszahl	$\left(\# = \frac{1}{100} \cdot K \cdot t\right)$	#
Zinsen	Z	Zinsfaktor	$\left(q = \frac{100+p}{100} = 1 + \frac{p}{100}\right)$	q
Rate, Rente	R	Zinsdivisor	$\left(D = \frac{360}{p}\right)$	D
Zinssatz des Kapitals	$p\%$	Anzahl der Tage		t
per annum (pro Jahr)	*p. a.*	Anzahl der Monate		m
Schuld, Darlehen	S	Anzahl der Jahre		n

Zinsen in verschiedenen Zeiträumen:

Tageszinsen: $Z_t = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360} = \frac{\#}{D}$

Monatszinsen: $Z_m = \frac{K \cdot p \cdot m}{100 \cdot 12}$

Jahreszinsen: $Z = \frac{K \cdot p}{100}$ $Z_n = \frac{K \cdot p \cdot n}{100}$

Rendite: $p = \frac{Z \cdot 100}{K}$

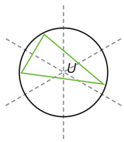
Zinseszinsen

(Endwert K_n des Anfangskapitals K_0 nach n Jahren) $K_n = K_0 \cdot q^n = K_0 \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^n$ $n = \frac{\lg K_n - \lg K_0}{\lg q}$

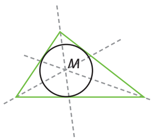
5. Geometrie

5.1 Das Dreieck

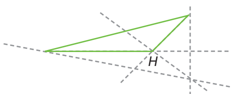
Seiten a, b, c **Winkel** α, β, γ **Höhe** h **Flächeninhalt** A **Umfang** U



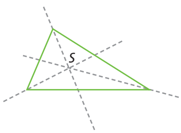
Umkreismittelpunkt *U*
Der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten.



Inkreismittelpunkt *M*
Der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden.



Höhenschnittpunkt *H*
Die Schnittstelle der drei Höhen.

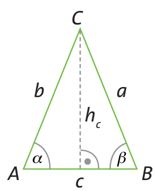


Schwerpunkt *S*
Der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden. Er teilt jede Seitenhalbierende vom Eckpunkt des Dreiecks aus im Verhältnis 2 : 1.

Gleichschenkliges Dreieck

$a = b; \quad \alpha = \beta$ $\qquad U = 2a + c$

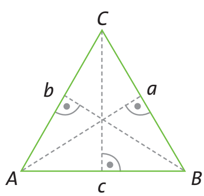
$h_c = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}c^2}$ $\qquad A = \frac{1}{2}c \cdot h_c$



Gleichseitiges Dreieck

$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ $\qquad U = 3a$

$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ $\qquad A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$



Rechtwinkliges Dreieck

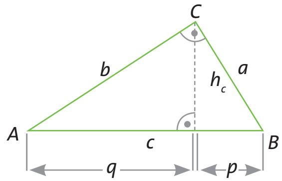
$\gamma = 90^\circ$ $U = a + b + c$

Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Kathetensatz: $a^2 = c \cdot p;\ b^2 = c \cdot q$

Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

Hypotenusenabschnitte: $p + q = c$

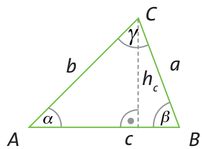


Allgemeines Dreieck

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$U = a + b + c$

$$A = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

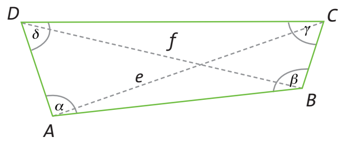


Kongruenzsätze

Dreiecke sind kongruent, wenn sie in		
drei Seitenlängen übereinstimmen	$a = a´;\ b = b´;\ c = c´$	sss
zwei Seitenlängen und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel übereinstimmen	z.B.: $a = a´;\ b = b´;\ \gamma = \gamma´$	sws
zwei Seiten und dem Gegenwinkel der längeren Seite übereinstimmen	z.B.: $a = a´;\ b = b´;\ \beta = \beta´$ $(b>a)$	SsW
einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen	z.B.: $a = a´;\ \beta = \beta´;\ \gamma = \gamma´;$	wsw

5.2 Das Viereck

Beliebiges Viereck

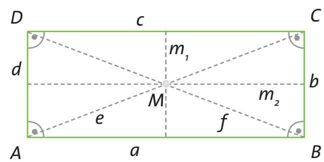


$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

Rechteck

Alle Innenwinkel betragen 90°.
Die Diagonalen sind gleich lang und halbieren einander.

M	Mittelpunkt
e, f	Schrägachsen
m_1, m_2	Symmetrieachsen



$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$

$a = c; b = d$

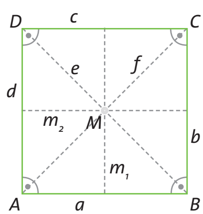
$e = f = \sqrt{a^2 + b^2}$

$U = 2(a+b);$ $\quad A = a \cdot b$

Quadrat

Alle Innenwinkel betragen 90°.
Die Diagonalen sind zueinander senkrecht.
M ist Mittelpunkt und Drehzentrum.

e, f, m_1, m_2 Symmetrieachsen



$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$ und $a = b = c = d$

$e = f = a\sqrt{2};$ $\quad e \perp f$

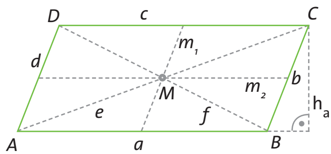
$U = 4a;$ $\quad A = a^2 = \frac{1}{2} \cdot e^2$

Parallelogramm

Gegenüberliegende Seiten sind zueinander parallel und gleich lang.
Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß.

M Mittelpunkt und Drehzentrum

e, f, m_1, m_2 Schrägachsen



$b \parallel d$ und $a \parallel c$

$a = c; b = d;$ e und f halbieren sich.

$U = 2(a+b);$ $A = a \cdot h_a$

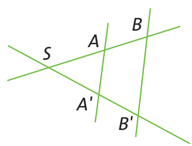
5.3 Strahlensätze, Teilungen einer Strecke

Werden zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen.

Strahlensätze

1) Wenn $AA' \parallel BB'$, dann $|SA| : |SB| = |SA'| : |SB'|$ und umgekehrt.

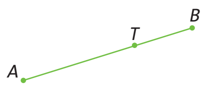
2) Wenn $AA' \parallel BB'$, dann $|SA| : |SB| = |AA'| : |BB'|$.



Teilverhältnis

1) T teilt $\overline{AB}$ im Verhältnis t, wenn $\overrightarrow{AT} = t \cdot \overrightarrow{TB}$.

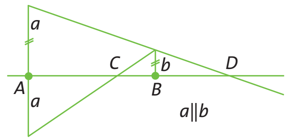
2) T teilt $\overline{AB}$ im Verhältnis x, wenn $\overrightarrow{AT} = x \cdot \overrightarrow{AB}$.



Zusammenhang: $t = \dfrac{x}{1-x}$ $(x \neq 1)$

Harmonische Teilung

C und D teilen $\overline{AB}$ harmonisch, wenn $\overline{AB}$ von C im Verhältnis t und von D im Verhältnis $-t$ geteilt wird.



C und D teilen $\overline{AB}$ harmonisch, wenn

1) A, B, C und D auf einer Geraden liegen,

2) $C \in \overline{AB}, D \notin \overline{AB}, C \neq B$ und $D \neq B$ und

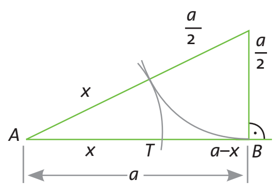
3) $|AD| : |BD| = |AC| : |BC|$.

Die Halbierenden eines Dreiecksinnenwinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseite harmonisch im Verhältnis der anliegenden Seiten:

$|AT| : |TB| = |AU| : |UB| = b : a$

Goldener Schnitt

T mit $T \in \overline{AB}$ teilt $\overline{AB}$ nach dem Goldenen Schnitt, wenn



$|AB| : |AT| = |AT| : |TB|$ oder

$x^2 = |AT|^2 = |AB| \cdot |TB|$ oder

$x = |AT| = \frac{1}{2} \cdot |AB| (\sqrt{5} - 1)$

5.4 Vektoren in der Ebene

Eine Klasse paralleler Pfeile mit gleicher Länge und gleicher Richtung heißt **Vektor**.

Die Länge eines Repräsentanten des Vektors $\vec{a}$ bezeichnet man als **Betrag des Vektors** und schreibt: $|\vec{a}|$.

Als **Nullvektor** $\vec{o}$ bezeichnet man einen Vektor mit dem Betrag 0: $\vec{o} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} \ldots$

Einheitsvektor: Vektor mit dem Betrag 1

Zwei Vektoren $\vec{a} \neq 0$ und $\vec{b} \neq 0$ sind gleich genau dann, wenn gilt:

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ (Parallelität), $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ (gleiche Orientierung) und $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ (gleiche Länge)

Addition von Vektoren

Die Addition + in der Menge V der Vektoren ist folgendermaßen erklärt:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Differenz zweier Vektoren

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$$

S-Multiplikation (Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen):

Ist $\vec{a}$ ein Vektor und r eine reelle Zahl, so ist auch $r \cdot \vec{a}$ ein Vektor. Seine Eigenschaften sind:

1) $|r \cdot \vec{a}| = |r| \cdot |\vec{a}|$

2) Wenn $r > 0$ und $\vec{a} \neq \vec{o}$, dann hat $r \cdot \vec{a}$ die gleiche Richtung wie $\vec{a}$.

3) Wenn $r < 0$ und $\vec{a} \neq \vec{o}$, dann hat $r \cdot \vec{a}$ entgegengesetzte Richtung wie $\vec{a}$.

Regeln

$$(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$$

$$r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$$

$$(r \cdot s)\vec{a} = r \cdot (s \cdot \vec{a})$$

Lineare Unabhängigkeit

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen linear unabhängig, wenn sich keiner der Vektoren als Vielfaches des anderen darstellen lässt. Sie sind linear unabhängig, wenn die Gleichung:

$x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = \vec{o}$ nur die Lösung $x = y = 0$ besitzt, sofern $a \neq 0$ und $b \neq 0$.

5.5 Stereometrie

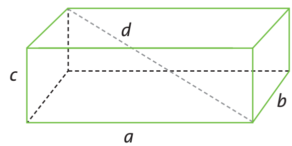
Bezeichnungen

d	räumliche Diagonale	r	Radius Umkugel	A_O	Oberfläche
h	räumliche Höhe	ρ	Radius Inkugel	A_M	Mantelfläche
s	Länge der Seitenkanten	V	Volumen	A_G	Grundfläche

Polyeder (Vielflach)

Eulerscher Polyedersatz:
Für ein konvexes Polyeder mit f **Flächen**, k **Kanten** und e **Ecken** (f-Flach) gilt: $e + f - k = 2$.

Quader



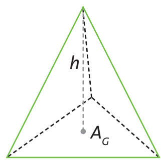
$V = a \cdot b \cdot c$

$A_O = 2 \cdot (ab + bc + ca)$

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ bzw. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$M = 2(ac + bc)$

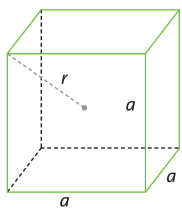
Pyramide



$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$

$A_O = A_G + A_M$

Hexaeder (Würfel)



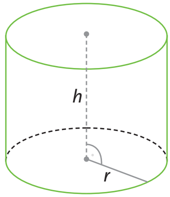
$V = a^3$

$A_O = 6a^2$

$r = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

$\rho = \frac{a}{2}$

Drehzylinder (gerader Kreiszylinder)

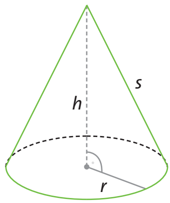


$$V = A_G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$$

$$A_M = 2\pi r \cdot h$$

$$A_O = 2\pi r(r+h)$$

Drehkegel (gerader Kreiskegel)



$$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$$

$$A_M = \pi r s$$

$$A_O = \pi r(r+s)$$

Kugel

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$$

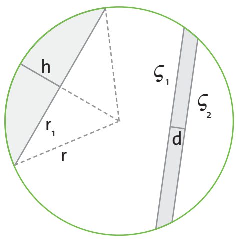
$$A_O = 4\pi r^2 = \pi d^2$$

Kugelabschnitt:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot h^2(3r-h) = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + h^2)$$

$$A_M = 2\pi rh = \pi(r_1^2 + h^2) \qquad \text{(Kugelkappe)}$$

Kugelausschnitt:



$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

$$A_O = 2\pi r\left(h + \frac{1}{2}\sqrt{h(2r-h)}\right) \qquad A_M = \pi r_1 r$$

Kugelschicht:

$$V = \frac{1}{6}\pi d\left(3\varsigma_1^2 + 3\varsigma_2^2 + d^2\right)$$

$$A_M = 2\pi rd$$

6. Trigonometrie

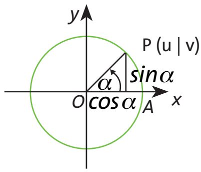
6.1 Kreisfunktionen

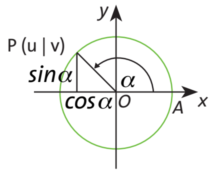
Darstellung am Einheitskreis *(r=1)*, dessen Mittelpunkt im Ursprung *O* eines kartesischen Koordinatensystems liegt. *P (u | v)* ist ein beliebiger Punkt auf dem Einheitskreis, womit $\sphericalangle$ *AOP* jeder beliebige – im Gegenuhrzeigersinn orientierte – Winkel α sein kann.

Es gilt:

$\cos\alpha = u$ (Abszisse von *P*)

$\sin\alpha = v$ (Ordinate von *P*)



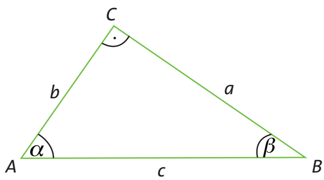


$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \alpha \neq (2k+1)\cdot 90^\circ$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \alpha \neq k\cdot 180^\circ \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Darstellung am rechtwinkligen Dreieck

c Hypothenuse
b Ankathete zu α und Gegenkathete zu β
a Gegenkathete zu α und Ankathete zu β



$$\frac{a}{c} = \sin\alpha = \cos\beta \qquad \frac{b}{c} = \cos\alpha = \sin\beta$$

$$\frac{a}{b} = \tan\alpha = \cot\beta \qquad \frac{b}{a} = \cot\alpha = \tan\beta$$

Funktionsdarstellung

$\sin : \alpha \mapsto \sin\alpha$ (Sinusfunktion) $\cos : \alpha \mapsto \cos\alpha$ (Cosinusfunktion)

$\tan : \alpha \mapsto \tan\alpha$ (Tangensfunktion) $\cot : \alpha \mapsto \cot\alpha$ (Cotangensfunktion)

Zusammenhänge zwischen den Kreisfunktionen

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \qquad 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2$ (entsprechend bei *cos*, *tan* und *cot*)

6.2 Ebene Trigonometrie

Sinussatz: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$

Dreiecksinhalt: $A = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma$

Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

Radius Inkugel: $\rho = (s - a) \cdot \tan\frac{\alpha}{2}$

Tangenssatz: $\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{a+b}{a-b}$

Projektionssatz: $a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta$

Notizen

7. Lösen von Gleichungen

7.1 Äquivalenzumformungen

Zwei Gleichungen gelten als äquivalent, wenn sie die gleiche Lösungsmenge besitzen.

Äquivalenzumformungen linearer Gleichungen

1) Addieren derselben Zahl zu beiden Seiten einer Gleichung; die übrigen Gleichungen bleiben unverändert.

2) Multiplizieren beider Seiten einer Gleichung mit derselben, von Null verschiedenen Zahl; die übrigen Gleichungen bleiben unverändert.

3) Ersetzen einer Gleichung durch die Summe, gebildet aus dieser Gleichung und einer anderen des Systems; die übrigen Gleichungen bleiben unverändert.

7.2 Lösen linearer Gleichungen und Gleichungssysteme

Additionsverfahren mit zwei Variablen

1) Beide Gleichungen addieren/subtrahieren, um eine Gleichung mit nur einer Variablen, zum Beispiel x, zu erhalten.
2) Diese Gleichung nach der Variablen x auflösen.
3) x in eine Ausgangsgleichung einsetzen und y ermitteln.

Gleichsetzungsverfahren mit zwei Variablen

1) Beide Gleichungen nach einer Variablen (zum Beispiel x) auflösen.
2) Den Term für x aus der ersten und zweiten Gleichung gleichsetzen und y ermitteln.
3) y in eine Ausgangsgleichung einsetzen und x ermitteln.

Einsetzungsverfahren mit zwei Variablen

1) Eine Gleichung nach x auflösen.
2) Den Term für x in die zweite Gleichung einsetzen und y ermitteln.
3) y in die erste Gleichung einsetzen und x ermitteln.

Gauß'sches Verfahren

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n &= b'_3 \\
&\ldots \\
a'_{nn}x_n &= b'_n
\end{aligned}$$

7.3 Lösen quadratischer Gleichungen

Quadratische Gleichungen	**allgemeine Form:** $ax^2 + bx + c = 0$, wobei a, b, c konstant und $a \neq 0$ **Normalform:** $x^2 + px + q = 0$, wobei p, q konstant	
Lösungsformeln	Für allgemeine Form $x_{1,2} = -\dfrac{b}{2a} \pm \sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$	Für Normalform $x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$

Diskriminante	$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, *daher* $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$
Anzahl der Lösungen	Falls $D > 0$: zwei Lösungen $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ und $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ Falls $D = 0$: genau eine Lösung, $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$ Falls $D < 0$: keine Lösung im Bereich der reellen Zahlen
Satz von Vieta	Hat $x^2 + px + q = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, dann gilt: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$
Linearfaktor-zerlegung	Hat $x^2 + px + q = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, dann gilt: $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$
Quadratische Ergänzung	$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$

7.4 Polynome n-ten Grades

Polynom n-ten Grades: $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$; $(a_n \neq 0)$

Satz: Für $P_n(x_o) = 0$ mit $x_o \neq 0$ ist: $P_n(x) = (x - x_o)\left(a_n x^{n-1} + \ldots - \frac{a_0}{x_0}\right) = (x - x_0) \cdot P_{n-1}(x)$

7.5 Gleichungen n-ten Grades

Eine Gleichung n-ten Grades $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o = 0$; $(a_n \neq 0)$

lässt sich bei Kenntnis der Lösung x_o durch Abspalten des Linearfaktors $x - x_o$ auf eine Gleichung vom Grad $n - 1$ reduzieren.

Eine Gleichung n-ten Grades hat höchstens *n* verschiedene Lösungen. Ist *n* ungerade, so hat die Gleichung mindestens eine reelle Lösung. Bei komplexen Zahlen als Lösung hat die Gleichung genau *n* Lösungen.

8. Stochastik

8.1 Ereignisse

Wahrscheinlichkeitssprache	Symbol	Mengensprache
Ergebnisraum	S (auch Ω)	Grundmenge
Ereignis	A	Teilmenge
Elementarereignis	$\{a_i\}$	einelementige Teilmenge
Ereignisraum	$\mathfrak{P}(S)$	Potenzmenge
sicheres Ereignis, unmögliches Ereignis	S, $\emptyset$	Grundmenge, leere Menge
A oder B	$A \cup B$	Vereinigung
A und B	$A \cap B$	Durchschnitt
Gegenereignis	$\bar{A}$	Komplement
A und B sind unvereinbar	$A \cap B = \phi$	A und B sind elementefremd

8.2 Kombinatorik

Die Anzahl der Elemente der endlichen Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sei $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_n|$.

Summenregel

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_1| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|, \text{ falls } A_i \cap A_k = \emptyset \text{ für alle } i \neq k$$

Produktregel

$$|A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$$

Urnenmodell: Aus einer Urne mit n Kugeln werden k Kugeln gezogen	**Alphabet:** n Buchstaben und k Plätze	**Anzahl A**
Ziehen mit Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge	k-Tupel mit Wiederholung	$A = n^k$ (Variation)
Ziehen ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge	k-Tupel ohne Wiederholung	$A = \frac{n!}{(n-k)!}$ (Variation)
Sonderfall: Vollerhebung	n-Tupel ohne Wiederholung	$A = n!$
Ziehen ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	k-elementige Teilmenge	$A = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ (Kombination)
Ziehen mit Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	Anordnung auf k Plätzen mit Wiederholung ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	$A = \binom{n-1+k}{n-1}$ (Kombination)

8.3 Wahrscheinlichkeit

$S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sei die endliche Ergebnismenge eines Zufallsexperiments.

Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen: Die Funktion $P: S \to \mathbb{R}$ mit

1) $P(a_i) \geq 0$ für alle a_i 2) $\sum_{i=1}^{n} P(a_i) = 1$

heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion auf S.

$P(a_i)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses a_i.

Wahrscheinlichkeit von Ereignissen: Die Funktion $P: \mathfrak{P}(S) \to \mathbb{R}$ mit

1) $P(\{a_i\}) \geq 0$ für alle a_i 2) $\sum_{i=1}^{n} P(\{a_i\}) = 1$ 3) $P(A) = \sum_{a_i \in A} P(\{a_i\})$ 4) $P(\emptyset) = 0$

heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(S)$.
$P(A)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A.

Eigenschaften

$P(A) \geq 0$ (Nichtnegativität)
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, falls $A \cap B = \emptyset$ (Additivität)
$P(S) = 1$ (Normiertheit)

Diese drei Eigenschaften (auch **Kolmogorow-Axiome** genannt) kennzeichnen nach Kolmogorow eine Wahrscheinlichkeitsfunktion. Die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen sind damit nicht festgelegt.

Weitere Eigenschaften:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (allgemeine Additivität)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ (Satz vom Gegenereignis)

$A \subseteqq B \Rightarrow P(A) \leqq P(B)$ (Monotonie)

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ (Wahrscheinlichkeit bei einer Zerlegung)

$P(A) = P(A \cap B_1) + \ldots + P(A \cap B_n)$, falls $B_1, \ldots, B_n$ eine Zerlegung von S ist.

Laplace-Experiment

Alle n Ergebnisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ (Laplace-Wahrscheinlichkeit).

Warscheinlichkeit eines Ereignisses A: $P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{|A|}{n}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$P_B(A)$ ist für $P(B) \neq 0$ die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B. Es gilt:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Multiplikationssatz: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$

Unabhängige Ereignisse *A* und *B*: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Totale Wahrscheinlichkeit *für* B, $\overline{B}$ **:** $P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)$

bzw. für die Zerlegung $B_1, \dots, B_n$ von S: $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$

Satz von Bayes *für* $B, \overline{B}$ **:**

$$P_A(B) = \frac{P(B) \cdot P_B(A)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A)} = \frac{P(B) \cdot P_B(A)}{P(A)}$$

bzw. für eine Zerlegung $B_1, \dots, B_n$ von S:

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}$$

8.4 Verteilungen

Es sei $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ die Menge aller Ergebnisse eines Zufallsexperimentes, P eine Wahrscheinlichkeitsfunktion auf $\mathfrak{P}(S)$.

Zufallsvariable (Zufallsgröße) ist eine Funktion $X: S \to \mathbb{R}$; Wertemenge $X(S) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$.
Das Ereignis $X = x_k$ ist die Teilmenge der Ergebnisse von S, die durch X auf x_k abgebildet werden: $X = x_k = \{a \mid X(a) = x_k \text{ mit } a \in S\}$

Wahrscheinlichkeitsfunktion
einer Zufallsvariablen X:

$f: \{x_1, \dots, x_m\} \to \mathbb{R}$

$x_k \mapsto p_k$ mit $p_k = P(X = x_k)$

Verteilungsfunktion
einer Zufallsvariablen X bei $x_1 < x_2 < \dots < x_m$:
$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_1 \\ p_1 + p_2 + \dots + p_k & \text{für } x_k \le x < x_{k+1} \\ 1 & \text{für } x_m \le x \end{cases}$$

Erwartungswert einer Zufallsvariablen X:

$E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_m \cdot p_m$

Linearität des Erwartungswertes: $E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$

Produktregel, nur für unabhängige X, Y : $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

Varianz einer Zufallsvariablen X: mit $\mu = E(X)$

$$Var(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_m - \mu)^2 \cdot p_m$$

$$Var(X) = E((X - \mu)^2); \; Var(X) = E(X^2) - \mu^2$$

Spezielle Verteilung

Gleichverteilung

Bei einer gleichverteilten Zufallsvariablen X haben alle n Werte die gleiche Wahrscheinlichkeit

$P(X=x_i)=\frac{1}{n}$ (Laplace-Wahrscheinlichkeit).

Gleichverteilte Zufallsvariable X mit den Werten 1, 2, ... , n:

x_i	1	2	...	n
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

$$E(X)=\frac{n+1}{2}; \qquad Var(X)=\frac{n^2-1}{12}$$

Binomialverteilung

n-gliedrige Bernoullikette: n-malige Durchführung des Bernoulliexperimentes mit der Trefferwahrscheinlichkeit p unter gleichen Bedingungen:

$$P(k \text{ Treffer}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$$q = 1 - p$$

Binomialverteilte Zufallsvariable X mit den Werten 0, 1, ... , n:

$$P(X=k)=B_{n;p}(k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}; \qquad E(X)=n\cdot p; \qquad Var(X)=n\cdot p\cdot q$$

Urnenmodell

Urne mit K roten und $N-K$ schwarzen Kugeln. Es wird n-mal mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X, welche die Anzahl k der gezogenen roten Kugeln beschreibt, ist binomialverteilt

mit $p=\frac{K}{N}$.

Summe: $P(X\leq k)=F_{n;p}(k)=\sum_{i=o}^{k}B_{n;p}(i)$; $\quad P(X<k)=F_{n;p}(k-1)=\sum_{i=o}^{k-1}B_{n;p}(i)$

$$P(a\leq X\leq b)=F_{n;p}(b)-F_{n;p}(a-1)=\sum_{i=a}^{b}B_{n;p}(i)$$

Vertauschungsformeln: $B_{n;p}(k)=B_{n;1-p}(n-k)$

$$F_{n;p}(k)=\sum_{i=o}^{k}B_{n;p}(i)=1-\sum_{i=o}^{n-k-1}B_{n;1-p}(i)=1-F_{n;1-p}(n-k-1)$$

Rekursionsformel: $B_{n;p}(k+1)=\frac{(n-k)\cdot p}{(k+1)\cdot q}\cdot B_{n;p}(k)$; $\quad B_{n;p}(0)=(1-p)^n$

Die Zufallsvariable X sei $B_{n;p}$-verteilt. Die Zufallsvariable $\overline{X}=\frac{1}{n}\cdot X$ mit $\mu_{\overline{X}}=p$ und $\sigma_{\overline{X}}=\frac{p\cdot q}{n}$ beschreibt die relative Häufigkeit der Treffer.

Gesetz der großen Zahlen nach Tschebyscheff für $\overline{X}$: $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\overline{X}-p|<\varepsilon)=1$

Geometrische Verteilung

Ein Bernoulliexperiment mit der Trefferwahrscheinlichkeit p wird genau so lange wiederholt, bis der erste Treffer eintritt: P (k Versuche) = $q^{k-1}\cdot p$

Geometrisch verteilte Zufallsvariable X mit den Werten 1, 2, 3, ...

$P(X=k)=q^{k-1}\cdot p$; $\quad E(X)=\frac{1}{p}$; $\quad Var(X)=\frac{q}{p^2}$ $\quad P(X\leq k)=1-q^k$

Urnenmodell

Urne mit K roten und $N-K$ schwarzen Kugeln. Man zieht so lange mit Zurücklegen, bis man eine rote Kugel erhält. Die Zufallsvariable X, welche die Anzahl k der Ziehungen beschreibt, ist geometrisch verteilt mit $p=\frac{K}{N}$.

Balkendiagramme	Darstellung der Häufigkeitsverteilung mit Hilfe auf der y-Achse waagerecht liegender, nicht aneinander grenzender Säulen.
Strichdiagramme	Können ähnlich wie Balkendiagramme eingesetzt werden. Die Wahl der Achsen kann abweichen.
Streifendiagramme	Darstellung von Anteilen (Prozenten) an einem Ganzen. Die Anteile sind proportional.
Kreisdiagramme	Darstellung von Anteilen (Prozenten) an einem Ganzen. Die Anteile sind proportional zum Winkel.

Notizen

9. Physik

9.1 Ausgewähle Größen und Einheiten im Überblick

Größe	Formelzeichen	Einheit	Name der Einheit
Arbeit (elektrische)	W	J $N \cdot m$ $W \cdot s$ $kW \cdot h$	Joule Newtonmeter Wattsekunde Kilowattstunde
Beschleunigung	a, g	$m \cdot s^{-2}$	Meter durch Quadratsekunde
Dichte (Massendichte)	ρ	$kg \cdot m^{-3}$	Kilogramm durch Kubikmeter
Drehimpuls	L	$N \cdot m \cdot s$	Newtonmetersekunde
Drehmoment	M	$N \cdot m$	Newtonmeter
Drehzahl	n	s^{-1}	durch Sekunde
Druck	p	Pa bar at	Pascal Bar Atmosphäre
Energie	E	J $N \cdot m$ $W \cdot s$	Joule Newtonmeter Wattsekunde
Frequenz	f, ν	Hz	Hertz
Geschwindigkeit	v	$m \cdot s^{-1}$ $km \cdot h^{-1}$	Meter durch Sekunde Kilometer durch Stunde
Impuls (Bewegungsgröße)	p	$kg \cdot m \cdot s^{-1}$	Kilogramm mal Meter durch Sekunde
Kraft	F	N kp	Newton Kilopond

Größe	Formelzeichen	Einheit	Name der Einheit
Kraftstoß	I	$N \cdot s$	Newton mal Sekunde
Leistung	P	W	Watt
Spannung (elektrische)	U, u	V	Volt
Stromstärke (elektrische)	I, i	A	Ampere
Temperatur	T	K $°C$	Kelvin Grad Celsius
Weg	s	m	Meter
Widerstand (ohmscher)	R	Ω	Ohm

Notizen

10. Chemie

10.1 Chemische Formeln und Periodensystem

Oxide	
$Cu_2O_{(s)}$	Kupfer(I)-oxid
$CuO_{(s)}$	Kupfer(II)-oxid
$Al_2O_{3\,(s)}$	Aluminiumoxid
$H_2O_{2\,(l)}$	Wasserstoffperoxid
$Na_2O_{(s)}$	Natriumoxid

Hydroxide und Laugen	
$NaOH_{(s)}$	Natriumhydroxid
$NaOH_{(aq)}$	Natronlauge
$KOH_{(aq)}$	Kalilauge
$NH_{3\,(g)}$	Ammoniak
$NH_4OH_{(aq)}$	Ammoniakwasser

Verbindungen des Kohlenstoffes	
$CO_{(g)}$	Kohlenstoffmonoxid
$CO_{2\,(g)}$	Kohlenstoffdioxid
$H_2CO_{3\,(aq)}$	Kohlensäure
$NaHCO_{3\,(s)}$	Natriumhydrogencarbonat
$Na_2CO_{3\,(s)}$	Natriumcarbonat

Verbindungen des Chlors	
$HCl_{(g)}$	Chlorwasserstoff
$HCl_{(aq)}$	Salzsäure
$NaCl_{(s)}$	Natriumchlorid
$AlCl_{3\,(s)}$	Aluminiumchlorid
$CaCl_{2\,(s)}$	Calciumchlorid

Verbindungen des Schwefels	
$SO_{2\,(g)}$	Schwefeldioxid
$H_2SO_{3\,(aq)}$	Schweflige Säure
$NaHSO_{3\,(s)}$	Natriumhydrogensulfit
$Na_2SO_{3\,(s)}$	Natriumsulfit
$Al_2(SO_3)_{3\,(s)}$	Aluminiumsulfit
$CaSO_{4\,(s)}$	Calciumsulfat
$H_2S_{(g)}$	Schwefelwasserstoff
$H_2S_{(aq)}$	Schwefelwasserstoffsäure
$Na_2S_{(s)}$	Natriumsulfid

Säuren	
$H_2CO_{3\,(aq)}$	Kohlensäure
$H_2SO_{3\,(aq)}$	Schweflige Säure
$H_2SO_{4\,(aq)}$	Schwefelsäure
$H_3PO_{4\,(aq)}$	Phosphorsäure
$CH_3COOH_{(l)}$	Essigsäure
$HCl_{(aq)}$	Salzsäure
$HNO_{2\,(aq)}$	Salpetrige Säure
$HNO_{3\,(aq)}$	Salpetersäure
H_3O^+-Ionen	Oxonium-Ionen

Verbindungen des Stickstoffs	
$N_2O_{(g)}$	Distickstoffmonoxid
$NaNO_{2\,(s)}$	Natriumnitrit
$NaNO_{3\,(s)}$	Natriumnitrat

Verbindungen des Broms	
$HBr_{(g)}$	Bromwasserstoff
$HBr_{(aq)}$	Bromwasserstoffsäure
$NaBr_{(s)}$	Natriumbromid

Legende
g: (gaseous) gasförmig, l: (liquid) flüssig, s: (solid) fest, aq: (aqueous) in Wasser gelöst

Notizen

Ordnungszahl — 1
Atommasse in *u* — 1,008
Symbol — H
Elektronegativitätswert — 2,1
Name — Wasserstoff

	Hauptgruppe		Nebengruppe										Hauptgruppe					
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII			I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	1 H 1,008 2,1 Wasserstoff																	2 He 4,003 Helium
2	3 Li 6,94 1,0 Lithium	4 Be 9,01 1,5 Beryllium											5 B 10,81 2,0 Bor	6 C 12,01 2,5 Kohlenstoff	7 N 14,007 3,0 Stickstoff	8 O 15,999 3,5 Sauerstoff	9 F 18,998 4,0 Fluor	10 Ne 20,18 Neon
3	11 Na 22,99 0,9 Natrium	12 Mg 24,31 1,2 Magnesium											13 Al 26,98 1,5 Aluminium	14 Si 28,09 1,8 Silicium	15 P 30,97 2,1 Phosphor	16 S 32,07 2,5 Schwefel	17 Cl 35,45 3,0 Chlor	18 Ar 39,95 Argon
4	19 K 39,10 0,8 Kalium	20 Ca 40,08 1,0 Calcium	21 Sc 44,96 1,3 Scandium	22 Ti 47,88 1,5 Titan	23 V 50,94 1,6 Vanadium	24 Cr 51,996 1,6 Chrom	25 Mn 54,94 1,5 Mangan	26 Fe 55,85 1,8 Eisen	27 Co 58,93 1,8 Cobalt	28 Ni 58,69 1,8 Nickel	29 Cu 63,55 1,9 Kupfer	30 Zn 65,39 1,6 Zink	31 Ga 69,72 1,6 Gallium	32 Ge 72,61 1,8 Germanium	33 As 74,92 2,0 Arsen	34 Se 78,96 2,4 Selen	35 Br 79,90 2,8 Brom	36 Kr 83,80 Krypton
5	37 Rb 85,47 0,8 Rubidium	38 Sr 87,62 1,0 Strontium	39 Y 88,91 1,3 Yttrium	40 Zr 91,22 1,4 Zirconium	41 Nb 92,91 1,6 Niob	42 Mo 95,94 1,8 Molybdän	43 Tc (98) 1,9 Technetium	44 Ru 101,07 2,2 Ruthenium	45 Rh 102,91 2,2 Rhodium	46 Pd 106,42 2,2 Palladium	47 Ag 107,87 1,9 Silber	48 Cd 112,41 1,7 Cadmium	49 In 114,82 1,7 Indium	50 Sn 118,71 1,8 Zinn	51 Sb 121,76 1,9 Antimon	52 Te 127,60 2,1 Tellur	53 I 126,90 2,5 Iod	54 Xe 131,29 Xenon
6	55 Cs 132,91 0,7 Caesium	56 Ba 137,33 0,9 Barium	*	72 Hf 178,49 1,3 Hafnium	73 Ta 180,95 1,5 Tantal	74 W 183,84 1,7 Wolfram	75 Re 186,21 1,9 Rhenium	76 Os 190,23 2,2 Osmium	77 Ir 192,22 2,2 Iridium	78 Pt 195,08 2,2 Platin	79 Au 196,97 2,4 Gold	80 Hg 200,59 1,9 Quecksilber	81 Tl 204,38 1,8 Thallium	82 Pb 207,2 1,8 Blei	83 Bi 208,98 1,9 Bismut	84 Po (209) 2,0 Polonium	85 At (210) 2,2 Astat	86 Rn (222) Radon
7	87 Fr (223) 0,7 Francium	88 Ra 226,03 0,9 Radium	**	104 Rf (261) Rutherfordium	105 Db (262) Dubnium	106 Sg (266) Seaborgium	107 Bh (264) Bohrium	108 Hs (267) Hassium	109 Mt (268) Meitnerium	110 Ds (271) Darmstadtium	111 Rg (272) Roentgenium	112 Uub[1] (272) Ununbium						

[1] vorläufiges IUPAC-Symbol

* Lanthanoide	57 La 138,91 1,1 Lanthan	58 Ce 140,12 1,1 Cer	59 Pr 140,91 1,1 Praseodym	60 Nd 144,24 1,2 Neodym	61 Pm (145) 1,2 Promethium	62 Sm 150,36 1,2 Samarium	63 Eu 151,97 1,2 Europium	64 Gd 157,25 1,1 Gadolinium	65 Tb 158,93 1,2 Terbium	66 Dy 162,50 1,2 Dysprosium	67 Ho 164,93 1,2 Holmium	68 Er 167,26 1,2 Erbium	69 Tm 168,93 1,2 Thulium	70 Yb 173,04 1,1 Ytterbium	71 Lu 174,97 1,2 Lutetium
** Actinoide	89 Ac 227,03 1,1 Actinium	90 Th 232,04 1,3 Thorium	91 Pa 231,04 1,5 Protactinium	92 U 238,03 1,7 Uran	93 Np (237) 1,3 Neptunium	94 Pu (244) 1,3 Plutonium	95 Am (243) 1,3 Americium	96 Cm (247) 1,3 Curium	97 Bk (247) 1,3 Berkelium	98 Cf (251) 1,3 Californium	99 Es (252) 1,3 Einsteinium	100 Fm (257) 1,3 Fermium	101 Md (258) 1,3 Mendelevium	102 No (259) 1,3 Nobelium	103 Lr (262) 1,3 Lawrencium

= basisch/sauer
= basisch
= basisch
= basisch/sauer
= sauer
= Keine Oxide
= Edelgase
( ) = Die Atommassen in den Klammern beziehen sich auf das längstlebige gegenwärtig bekannte Isotop.

Berliner Wasserbetriebe

Werde Umweltmeister!

Wähle aus verschiedenen technischen, kaufmännischen und akademischen Berufen. Lerne fließend das Wasser- und Umweltfach in einem der modernsten Dienstleistungsunternehmen der Wasserbranche in Deutschland kennen.

Wie erfrischend anders das sein kann, erfährst du hier:
www.ausbildung.bwb.de

Impressum

Herausgeber
Berliner Wasserbetriebe
Unternehmenskommunikation
Catrin Glücksmann (verantw.)

Tel. 0800.292 75 87
Fax 030.8644-2810

E-Mail: service@bwb.de
www.bwb.de

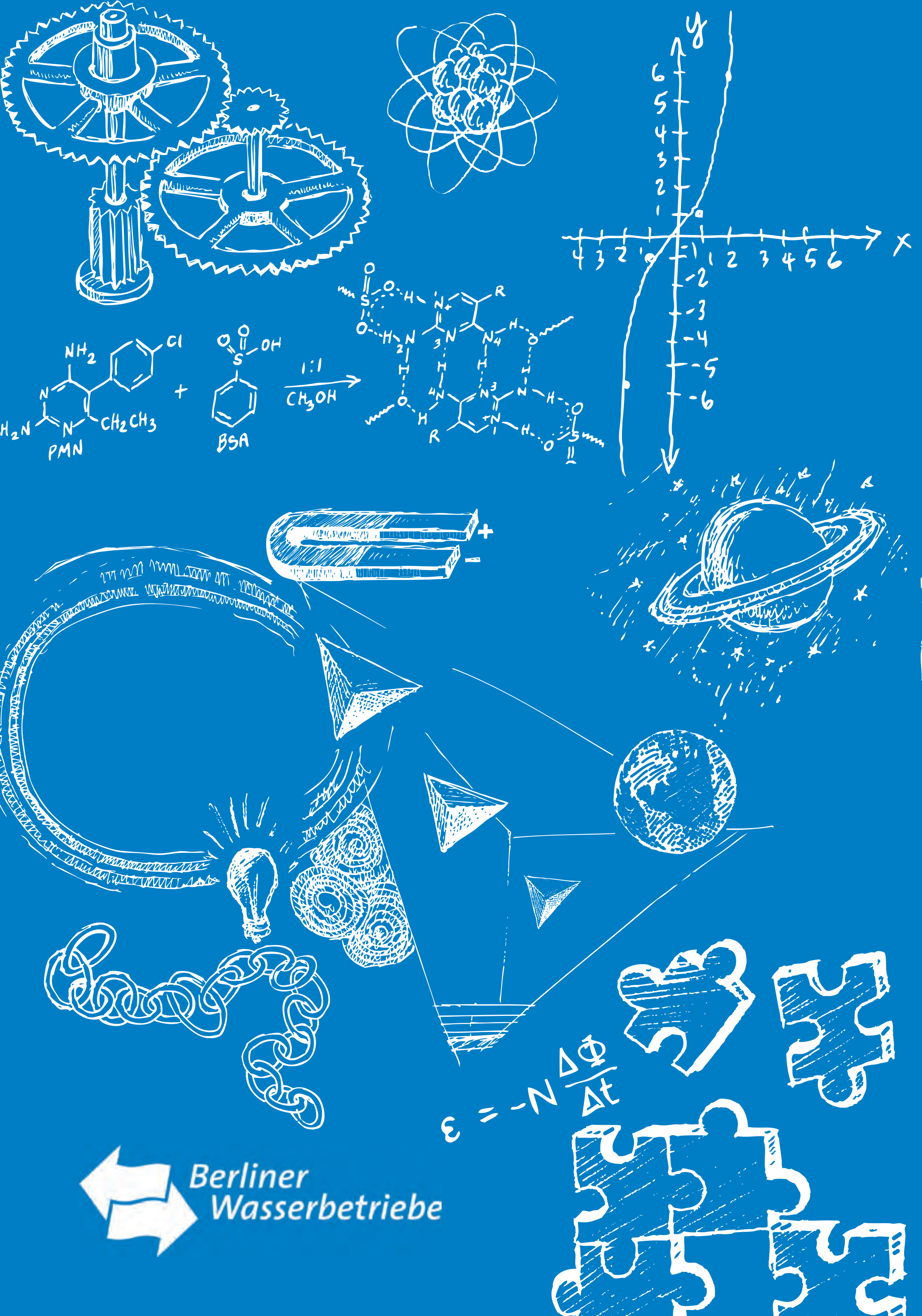
Hausanschrift
Neue Jüdenstraße 1
10179 Berlin

Postanschrift
Berliner Wasserbetriebe
10864 Berlin

Gestaltung
Berliner Wasserbetriebe,
DSA youngstar GmbH

Text
DSA youngstar GmbH

Foto
Malte Jäger,
iStockphoto



Berliner
Wasserbetriebe